УДК 62-50

Ю. И. Бердышев

О ЗАДАЧЕ УКЛОНЕНИЯ ДВУХ ДВИЖУЩИХСЯ ТОЧЕК ОТ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА*

1. Введение

Движение объекта (преследователя) в горизонтальной плоскости описывается нелинейной системой третьего порядка, использованной Р. Айзексом [1] при постановке задачи о «шофере-убийце». На управление преследователя накладывается ограничение геометрического характера, определяющее оценку снизу радиуса кривизны траектории преследователя. На этой же плоскости имеются две точки (убегающие), каждая из которых может двигаться только по соответствующей ей прямой с постоянной скоростью. Начальное состояние преследователя и убегающих задано. За счет выбора своего управления преследователь стремится за кратчайшее время поочередно (в заданном порядке) сблизиться с убегающими. Временем поимки считается время сближения со вторым убегающим. Целью убегающих является максимизация времени поимки. Для достижения этой цели они могут в начальный момент времени по своему усмотрению выбирать направления своего движения, однозначно определяемые углами β_1 и β_2.

Работа лежит в русле исследований школы Н. Н. Красовского [2, 3] по теории управления. Задачи о последовательном сближении преследователя с несколькими убегающими рассматривались и ранее, например в [4–6], но при этом предполагалось, что преследователь является безинерционным, т. е. описывается системой простых движений.

В работах [7–9] решена задача определения оптимального управления преследователя при фиксированных углах β_1 и β_2. Основной задачей в настоящей работе является определение углов β_1 и β_2, которые бы максимизировали время поимки убегающих при оптимальном поведении преследователя.

Предлагаемые решения рассматриваемых здесь задач основаны на результатах работ [7–9], в которых исследуется задача о наискорейшем последовательном обходе управляемым объектом совокупности движущихся по заданным прямым целевых точек.

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 06–01–00414, 04–01–96093).

2. Постановка задачи

Рассматривается следующая нелинейная система третьего порядка [1]:

$$\dot{x} = \cos\alpha, \quad \dot{y} = \sin\alpha, \quad \dot{\alpha} = u; \quad |u| \le 1. \tag{2.1}$$

Эта система описывает простейшую модель движения самолета, автомобиля (преследователя) в горизонтальной плоскости. Здесь x, y – координаты преследователя, отождествляемого с точкой на плоскости, α – угол между вектором скорости преследователя и осью x, u – управляющий параметр, удовлетворяющий указанному ограничению и характеризующий скорость изменения угла α. Неравенство в (2.1) ограничивает радиус кривизны траектории объекта. А именно, радиус кривизны не может быть меньше единицы. Состояние $(x(t_0), y(t_0), \alpha(t_0))$ объекта в начальный момент времени t_0 предполагается заданным. Без ограничения общности полагаем

$$x(t_0) = y(t_0) = \alpha(t_0) = t_0 = 0. \tag{2.2}$$

Система (2.1) функционирует на конечном достаточно большом промежутке времени $T_* = [0, t^0]$. В качестве множества допустимых управлений выберем $\mathbf{U}$ – множество всех измеримых по Борелю функций $U\colon T_* \to [-1, 1]$. Каждое управление $U \in \mathbf{U}$ порождает движение, исходящее из начальной позиции (2.2), которое будем обозначать через $(x_u, y_u, \alpha_u) = (x_u(t), y_u(t), \alpha_u(t))$, $t \in T$. Ввиду того что скорость преследователя равна единице, время его движения равно пройденному им пути за это время.

Убегающие $W_1(t)$ и $W_2(t)$, $t \ge 0$, могут совершать на плоскости xy только прямолинейные, равномерные движения, исходящие из начальных точек W_{10} и W_{20}. Координаты этих точек обозначим соответственно через x_1, y_1 и x_2, y_2. Величины скоростей v_1 и v_2 ($v_1 < 1$, $v_2 < 1$) убегающих предполагаются заданными, но направления их движения, определяемые углами β_1 и β_2, могут выбираться самими убегающими. Убегающий $W_i(t)$ $(i = 1, 2)$ считается пойманным, если местоположения преследователя $(x_u(t), y_u(t))$ и убегающего в некоторый момент времени t совпадут. Преследователю необходимо вначале поймать первого убегающего, а затем второго, при этом минимизировать время T встречи со вторым убегающим, которое будем считать временем поимки обоих убегающих. Очевидно, что время T зависит от выбора управляющих параметров U, β_1, β_2: $T = T(U, \beta_1, \beta_2)$. Преследователь стремится это время уменьшить, а убегающие – увеличить.

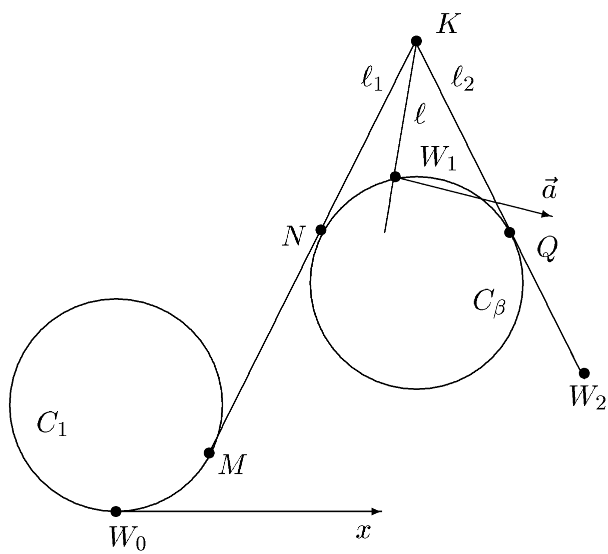
В настоящей работе предполагается, что в начальный момент времени первый убегающий достаточно удален от преследователя и от второго убегающего.

Основная задача состоит в выборе углов β_1 и β_2, при которых

$$\min_{U\in\mathbf{U}} T(U,\beta_1,\beta_2) \to \max_{\beta,\beta_2}. \qquad (2.3)$$

3. Решение основной задачи

Известно [7], что если углы β_1 и β_2, определяющие направление движения убегающих, заданы, то оптимальная траектория преследователя (ОТП) состоит из двух дуг окружностей единичного радиуса и отрезков прямых, их соединяющих (см. рисунок). При этом начальным участком является дуга W_0M окружности C_1, касающаяся оси абсцисс в начальной точке $W_0 = (0,0)$, первым прямолинейным участком ОТП является отрезок MN прямой ℓ_1, касающейся окружности C_1 и некоторой окружности C_β, проходящей через точку W_1 встречи преследователя с первой целью и содержащей дугу NQ ОТП. Конечным участком ОТП является отрезок QW_2 прямой ℓ_2, проходящей через точку W_2 встречи со второй целью и касающейся окружности C_β.



Кроме того, эта траектория должна удовлетворять условию выравнивания (см. (3.10) в [1]), которое однозначно определяет положение окружности C_β. В частности, при неподвижных целевых точках $W_1(t)$ и $W_2(t)$ из этого условия следует, что дуга NQ окружности C_β должна делиться точкой

W_1 пополам. В случае подвижных точек вектор $\vec{a}$, равный разности вектора скорости преследователя в точке W_1 и вектора скорости первого убегающего, должен быть ортогональным прямой ℓ, проходящей через W_1 и точку K, являющуюся пересечением прямых ℓ_1 и ℓ_2.

С использованием этих фактов построение ОТП при второй неподвижной цели $W_2(t) = W_{20}$ можно осуществить следующим образом. Вначале определим ОТП при условии, что цель только одна – $W_1(t)$. Здесь ОТП будет состоять из дуги окружности C_1 и отрезка прямой. Пусть t_1 – время поимки этой цели. Зададимся некоторым параметром t, $t \geq t_1$, вычислим координаты x^*, y^* точки W_1 по формулам

$$x^* = x_2 + v_1 t \cos\beta_1, \quad y^* = y_2 + v_1 t \sin\beta_1$$

и построим траекторию L_t, имеющую длину t и состоящую из дуги W_0M окружности C_1, отрезка MN прямой ℓ_1 и дуги NW_1 окружности C_β. Положение центра окружности C_β найдем из условия равенства длины траектории L_t времени t. Затем проводим прямую ℓ, ортогональную вектору $\vec{a}$.

Пусть K – точка пересечения прямых ℓ и ℓ_1; ℓ_2 – касательная к C_β и проходящая через точку K; $Q = (x_q, y_q)$ – точка касания ℓ_2 с C_β; ω – угол, между осью абсцисс и вектором $\overrightarrow{KQ}$. Знак величины

$$z_1 = (y_2 - y_q)\cos\omega - (x_2 - x_q)\sin\omega$$

определяет положение точки W_{20} относительно прямой ℓ_2. Выбором параметра t добьемся выполнения равенства $z_1 = 0$. Тогда точка W_{20} будет находиться на прямой ℓ_2, что эквивалентно выполнению упомянутого ранее условия выравнивания. Таким образом, в рассматриваемом случае при заданном угле β_1 ОТП определяется однозначно.

Заметим, что если каким-либо образом оптимальный угол β_1 найден, то оптимальный угол β_2 должен быть равен углу ω. Выбор другого угла β_2, отличного от ω, только увеличит время поимки. Действительно, пусть W_2 – точка встречи преследователя со вторым убегающим, который движется по прямой l_2; r – расстояние между точками W_{20} и W_2; E – эвольвента, построенная для окружности C_β и проходящая через точку W_2; C_0 – окружность радиуса r с центром в точке W_{20}. Тогда в достаточно большой окрестности точки W_2 окружность C_0 и эвольвента E имеют лишь одну общую точку – W_2, а точки окружности C_0 находятся по одну сторону от дуги эвольвенты E, лежащей в этой окрестности. Поскольку C_0 является границей области достижимости второго убегающего к моменту $t_2 = r/v_1$, а E – границей области достижимости преследователя к этому же моменту, то из сказанного выше следует, что при любом другом угле β_2, отличном от указанного, время поимки будет меньше, чем t_2.

В качестве начального приближения решения основной задачи выберем углы β_{10} и β_{20}, являющиеся решением задачи (2.3) при условии, что преследователь совершает простое движение, т. е. описывается системой

$$\dot{x} = u_1, \quad \dot{y} = u_2; \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1.$$

В этом случае метод определения углов β_{10} и β_{20} известен [6]. Напомним его. Строим окружность Аполлония

$$(x - x_*)^2 + (y - y_*)^2 = R^2$$

с центром в точке $W_* = (x_*, y_*)$, где

$$\rho = a/(1 - v_1^2), \quad R = \rho v_1, \quad a = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

$$x_* = \rho x_1/a, \quad y_* = \rho y_1/a.$$

На этой окружности находим точку $W = (x, y)$, для которой угол между векторами $\overrightarrow{WW_0}$ и $\overrightarrow{WW_*}$ равен углу между векторами $\overrightarrow{WW_*}$ и $\overrightarrow{WW_{20}}$. Тогда искомыми β_{10} и β_{20} являются углы, которые образуют соответственно векторы $\overrightarrow{W_{10}W}$ и $\overrightarrow{WW_{20}}$ с осью абсцисс. Целесообразность использования β_{10} и β_{20} в качестве начального приближения решения основной задачи подтверждается тем, что при достаточном удалении первой цели от преследователя и второй цели длины дуг окружностей C_1 и C_β, составляющих ОТП, будут существенно меньше длин прямолинейных участков ОТП и поэтому при уменьшенном масштабе ОТП будут мало отличаться от ломаной $W_0W_1W_2$.

Далее варьируем угол β_1 в окрестности значения β_{10} и для каждого β_1 при второй неподвижной цели $W_2(t) = W_{20}$ определяем ОТП и соответствующее время прибытия преследователя в точку W_{20}, полагая при этом $\beta_2 = \omega$. Из найденных времен находим наименьшее и соответствующие этому времени углы β_1 и β_2. Варьирование угла β_1 можно, например, проводить следующим образом. Пусть L_0 – ОТП при выбранном угле β_1, равном β_{10}, T_0 – длина траектории L_0, равная времени движения по ней. Положим $\beta_{11} = \beta_{10} + \Delta$, где Δ $(\Delta > 0)$ – шаг варьирования, и при заданном угле β_1, равном β_{11}, определим соответствующую ему ОТП L_1 и ее длину T_1. Если $T_1 < T_0$, то угол β_1 вновь увеличиваем на величину Δ, если же $T_1 > T_0$, то угол β_1 уменьшаем на величину Δ, затем вычисляем ОТП L_2 и ее длину T_2. Если $T_0 > T_2$, то угол β_1 вновь уменьшаем, если же $T_2 > T_0$, то угол β_{10} выбираем в качестве оптимального. Вычисления производим до тех пор, пока неравенства $T_{i+1} < T_i$, $(T_{i+1} > T_i)$, где i – число итераций, не изменят знак.

Литература

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
4. Чикрий А. А., Калашникова С. Ф. Преследование управляемым объектом группы убегающих // Кибернетика. 1987. № 4. С. 1–8.
5. Петросян Л. А., Томский Г. В. Геометрия простого преследования. Новосибирск: Наука, 1983.
6. Иванов М. Н., Маслов Е. П. О сравнении двух методов преследования в задаче о поочередной встрече // Автоматика и телемеханика. 1983. № 7. С. 38–43.
7. Бердышев Ю. И. Об одной задаче последовательного сближения нелинейной управляемой системой третьего порядка с группой движущихся точек // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 5. С. 741–751.
8. Бердышев Ю. И. О задаче обхода нелинейной управляемой системой третьего порядка двух точек // Изв. Урал. гос. ун-та. 2003. № 26. (Математика и механика; Вып. 5). С. 24–33.
9. Бердышев Ю. И. О задаче последовательного обхода одним нелинейным объектом двух движущихся точек // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11, № 1. С. 43–52.